习题一

32.

> 设欧式空间 $\mathbb{R}[x]_2$ 中的内积为
>
> $$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$
>
> (1) 求基 $1,t,t^2$ 的度量矩阵
> (2) 用矩阵乘法形式计算 $f(x)=1-x+x^2$ 与 $g(x)=1-4x-5x^2$ 的內积.

(1)

由 $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$ 定义计算得

$$G=\begin{pmatrix}2&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}&0\\\frac{2}{3}&0&\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

(2)

$$(f(x),g(x))=((1,t,t^2)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},(1,t,t^2)\begin{pmatrix}1\\-4\\-5\end{pmatrix})=(1,-4,-5)G\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

34.

> (1) 复数域 $\mathbb{C}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的二维线性空间. 是否存在 $\mathbb{C}$ 上的一个內积，使得 i 与 $1+i$ 成为 $\mathbb{C}$ 的一组标准正交基，为什么?
>
> (2) 试构造实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 上的一个內积，使得向量组 $e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3$ 是一组标准正交基. 问此时 e_2 与 e_3 的长度是多少？它们的夹角又是多少?

(1) 存在。因为 i 和 $\mathrm{i}+1$ 线性无关，可以作为二维线性空间的一组基。然后用 Gram_Schmidt 正交化方法将其变为一组标准正交基。

(2) 若 $e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3$ 是一组标准正交基，利用內积性质可计算得度量矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

i.e. 若 α,β 在 e_1,e_2,e_3 这组基下坐标为 $(x_1,x_2,x_3)'$ 和 $(y_1,y_2,y_3)'$，则有

$$(\alpha,\beta)=(y_1,y_2,y_3)A(x_1,x_2,x_3)'=x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3-(x_1y_2+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_2)$$

且 $\|e_2\|=\sqrt{2},\|e_3\|=\sqrt{2}$，得 $\cos(e_2,e_3)=\frac{(e_2,e_3)}{\|e_2\|\cdot\|e_3\|}=-\frac{1}{2}$ 即 $\langle e_2,e_3\rangle=\frac{2}{3}\pi$

37.

> 在欧式空间 $\mathbb{R}^4$ 中，求三个向量 $\alpha_1=(1,0,1,1)', \alpha_2=(2,1,0,-3)'$ 和 $\alpha_3=(1,-1,1,-1)'$ 所生成的子空间的一个标准正交基.

直接用 Gram-Schmidt 方法求解

$$
\begin{aligned}
&\beta_1=\alpha_1=(1,0,1,1)' && r_1=\beta_1/\|\beta_1\|=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,1)' \\
&\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,r_1)r_1=\frac{1}{3}(7,3,1,-8)' && r_2=\beta_2/\|\beta_2\|=\frac{1}{\sqrt{123}}(7,3,1,-8)' \\
&\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,r_2)r_2-(\alpha_3,r_1)r_1=\frac{1}{4}(-3,-54,23,-20)' && r_3=\beta_3/\|\beta_3\|=\frac{1}{\sqrt{3854}}(-3,-54,23,-20)'
\end{aligned}
$$

39.

> 设二维欧式空间 V 的一组基为 α_1,α_2，其度量矩阵为
>
> $$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$
>
> 试求 V 的一个标准正交基到 α_1,α_2 的过渡矩阵.

由度量矩阵可知 $(\alpha_1,\alpha_1)=(\alpha_2,\alpha_2)=5$ 故 α_1,α_2 长度相等，则 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \beta_2=\alpha_1-\alpha_2$ 必正交。令

$$r_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{18}}(\alpha_1+\alpha_2) \quad r_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1-\alpha_2)$$

则 r_1,r_2 是一个标准正交基，且有

$$(r_1,r_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}:=(\alpha_1,\alpha_2)\cdot P$$

则 r_1,r_2 到 α_1,α_2 的过渡矩阵为

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

42.

> 设线性空间 $V=\mathbb{R}^2$ 是欧式空间 (未必是通常的欧式空间). 设 $\alpha_1=(1,1)', \alpha_2=(1,-1)'$ 与 $\beta_1=(0,2)', \beta_2=(6,12)'$ 是 V 的两组基. 设 α_j 与 β_k 的内积分别为
>
> $$(\alpha_1,\beta_1)=1,(\alpha_1,\beta_2)=15,(\alpha_2,\beta_1)=-1,(\alpha_2,\beta_2)=3$$
>
> (1) 求两组基的度量矩阵
> (2) 求 V 的一个标准正交基.

(1)

易知 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2, \beta_2=9\alpha_1-3\alpha_2$

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1,\beta_1)&=(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_1)-(\alpha_1,\alpha_2)=1\\
(\alpha_1,\beta_2)&=(\alpha_1,9\alpha_1-3\alpha_2)=9(\alpha_1,\alpha_1)-3(\alpha_1-\alpha_2)=15\\
(\alpha_2,\beta_1)&=(\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_2,\alpha_1)-(\alpha_2,\alpha_2)=-1\\
(\beta_1,\beta_1)&=(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)=2\\
(\beta_1,\beta_2)&=(\alpha_1-\alpha_2,9\alpha_1-3\alpha_2)=12\\
(\beta_2,\beta_2)&=(9\alpha_1-3\alpha_2,9\alpha_1-3\alpha_2)=126
\end{aligned}
$$

可以推出

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1,\alpha_1)=2 \quad (\alpha_1,\alpha_2)=1\\
(\alpha_2,\alpha_2)=(\alpha_2,\alpha_1)+1=2
\end{aligned}
$$

从而度量矩阵

$$
A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2&12\\12&126\end{pmatrix}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
r_1&=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 & r_2&=\frac{1}{\|\beta_2\|}\cdot\beta_2=\frac{2}{\sqrt{6}}\alpha_2-\frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_1\\
\beta_2&=\alpha_2-(\alpha_2,r_1)r_1=\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1 & \|\beta_2\|&=\sqrt{(\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1,\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1)}=\sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

44.

> 设 A 是**反对称**实矩阵（即 $A'=-A$），证明：
> (1) A 的特征值为 0 或纯虚数
> (2) 设 $\alpha+\beta\mathrm{i}$ 是 A 的属于一个非零特征值的特征向量，其中 α,β 均为实向量，则 α 与 β 正交。

(1)

不妨假设 λ 为 A 的特征值，x 为对应的特征向量。即 $Ax=\lambda x$，两边同时乘 x^*，有

$$
x^*Ax=\lambda x^*x
$$

对上式取共轭转置得

$$
x^*A^*x=\lambda^*x^*x
$$

因 $A^*=-A$，则有 $\lambda+\lambda^*=0$。故 λ 为 0 或纯虚数

(2)

假设非零特征值为 $\lambda\mathrm{i}$，根据定义有 $A(\alpha+\beta\mathrm{i})=\lambda\mathrm{i}(\alpha+\beta\mathrm{i})$，即

$$
\begin{aligned}
A\alpha=-\lambda\beta\\
A\beta=\lambda\alpha
\end{aligned}
$$

从而 $-\alpha'A=-\lambda\beta'$, 进一步地 $\alpha'A\alpha=\lambda\beta'\alpha$，两边同时取转置得 $-\alpha'A\alpha=\lambda\beta'\alpha$

故 $\beta'\alpha=0$，即 α 与 β 正交。

45.

> 设 A 是 Hermite 矩阵。如果对任意向量 x 均有 $x^*Ax=0$，则 $A=0$.

由题设，当 x 取 A 的特征向量时，可以发现 A 的特征值均为 0。又因 A 为 Hermite 矩阵，则 A 可以对角化，且对角线元素全为0。故 $A=0$

事实上，n 阶 Hermite 矩阵 A 正定（半正定）的充要条件是 A 的特征值大于（大于等于）0.

习题二

33.

> 在欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中求一个超平面 W，使得向量 e_1+e_2 在 W 中的最佳近似向量为 e_2.

利用最佳近似的几何意义，e_1+e_2 在 W 中的最佳近似就是 e_1+e_2 在超平面 W 上的投影 i.e.

$$\mathrm{Proj}_W(e_1+e_2)=e_2 \implies e_1\in W^{\perp}$$

则当 $n=2$ 时，$W=\mathrm{span}\{e_2\}$；当 $n>2$ 时， $W=\mathrm{span}\{e_2,e_3,\cdots,e_n\}$

37.

> 设 α_0 是欧式空间中 V 的单位向量，$\sigma(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\alpha_0)\alpha_0,\alpha\in V$. 证明
> (1) σ 是线性变换；
> (2) σ 是正交变换.

(1)

$$\begin{aligned}\sigma(m\alpha+n\beta)&=m\alpha+n\beta-2(m\alpha+n\beta,\alpha_0)\alpha_0\\&=m\alpha+n\beta-2m(\alpha,\alpha_0)\cdot\alpha_0-2n(\beta,\alpha_0)\alpha_0\\&=m(\alpha-2(\alpha-\alpha_0)\alpha_0)+n(\beta-2(\beta,\alpha_0)\alpha_0)\end{aligned}$$

可见 σ 满足可加性和齐次性，故 σ 为线性变换

(2)

只需证明 σ 为等距变换

$$\begin{aligned}(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))&=(\alpha-2(\alpha,\alpha_0)\alpha_0,\alpha-2(\alpha-\alpha_0)\alpha_0)\\&=(\alpha,\alpha)-4((\alpha,\alpha_0)\alpha_0,\alpha)+4(\alpha,\alpha_0)^2(\alpha_0,\alpha_0)\\&=(\alpha,\alpha)-4(\alpha,\alpha_0)(\alpha,\alpha_0)+4(\alpha_0,\alpha)^2\\&=(\alpha,\alpha)\end{aligned}$$

故 $\|\sigma(\alpha)\|=\|\alpha\|$

38.

> 证明：欧式空间 V 的线性变换 σ 是反对称变换 $\iff$ σ 在 V 的标准正交基下的矩阵是反对称矩阵.

设 σ 在 V 的标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $A=(\alpha_{ij})$, 则 $\sigma(\alpha_i)=\sum_{k=1}^n a_{ki}\alpha_k\quad(1\le i\le n)$

$$\begin{aligned}(\sigma(\alpha_i),\alpha_j)=\sum_{k=1}^n a_{ki}(\alpha_k,\alpha_j)=a_{ji}\\(\alpha_i,\sigma(\alpha_j))=\sum_{k=1}^n a_{kj}(\alpha_i,\alpha_k)=a_{ij}\end{aligned}$$

故 σ 是反对称矩阵 $\iff$ $a_{ji}=-a_{ij}$ $\iff$ A 反对称

习题三

10.

> 设 A 的特征值为 $0,1$，对应的特征向量为 $(1,2)',(2,-1)'$. 判断 A 是否为对称矩阵并求 A.

两个特征向量正交，故 A 可以正交对角化，从而 A 对称

事实上，不妨假设

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

则 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{0,1\} \iff AP=PD$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies a=\frac{4}{5} \quad b=c=-\frac{2}{5} \quad d=\frac{1}{5}$$

从而

$$A=\begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Bonus Questions

> 求 $\alpha=(7,-4,-1,2)'$ 在 ω 上的正交投影，其中 ω 为 $Ax=0$ 的解空间
>
> $$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

首先为求 ω，将 A 化为 Hermite 标准形

$$A \to H_A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得 $\omega=N_A=\operatorname{span}\{(0,-1,1,0)',(-5,7,0,1)'\}$

下面进行 Schmidt 正交化

$$\begin{aligned} \beta_1&=\alpha_1=(0,-1,1,0)' & \gamma_1&=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1,0)' \\ \beta_2&=\alpha_2-(\alpha_2,\gamma_1)\gamma_1=(-5,\frac{7}{2},\frac{7}{2},1)' & \gamma_2&=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{202}}(-10,7,7,2)' \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \operatorname{Proj}_\omega\alpha&=(\alpha,\gamma_1)\gamma_1+(\alpha,\gamma_2)\gamma_2 \\ &=\frac{3}{2}(0,-1,1,0)'-\frac{1}{2}(-10,7,7,2)' \\ &=(5,-5,-2,-1)' \end{aligned}$$