

Homework 3 of Matrix Theory

Sequence Number:

Name:

Student ID:

习题一

32.

设欧式空间 $\mathbb{R}[x]_2$ 中的内积为

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

(1) 求基 $1, t, t^2$ 的度量矩阵

(2) 用矩阵乘法形式计算 $f(x) = 1 - x + x^2$ 与 $g(x) = 1 - 4x - 5x^2$ 的内积.

34.

- (1) 复数域 $\mathbb{C}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的二维线性空间. 是否存在 $\mathbb{C}$ 上的一个内积, 使得 i 与 $1+i$ 成为 $\mathbb{C}$ 的一组标准正交基, 为什么?
- (2) 试构造实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 上的一个内积, 使得向量组 $e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3$ 是一组标准正交基. 问此时 e_2 与 e_3 的长度是多少? 它们的夹角又是多少?

37.

在欧式空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 求三个向量 $\alpha_1 = (1, 0, 1, 1)'$, $\alpha_2 = (2, 1, 0, -3)'$ 和 $\alpha_3 = (1, -1, 1, -1)'$ 所生成的子空间的一个标准正交基.

39.

设二维欧式空间 V 的一组基为 α_1, α_2 , 其度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

试求 V 的一个标准正交基到 α_1, α_2 的过渡矩阵.

42.

设线性空间 $V = \mathbb{R}^2$ 是欧式空间 (未必是通常的欧式空间). 设 $\alpha_1 = (1, 1)'$, $\alpha_2 = (1, -1)'$ 与 $\beta_1 = (0, 2)'$, $\beta_2 = (6, 12)'$ 是 V 的两组基. 设 α_j 与 β_k 的内积分别为

$$(\alpha_1, \beta_1) = 1, (\alpha_1, \beta_2) = 15, (\alpha_2, \beta_1) = -1, (\alpha_2, \beta_2) = 3$$

- (1) 求两组基的度量矩阵
- (2) 求 V 的一个标准正交基.

44.

设 A 是**反对称**实矩阵（即 $A' = -A$ ），证明：

(1) A 的特征值为 0

(2) 设 $\alpha + \beta i$ 是 A 的属于一个非零特征值的特征向量，其中 α, β 均为实向量，则 α 与 β 正交。

45.

设 A 是 Hermite 矩阵。如果对任意向量 x 均有 $x^*Ax = 0$, 则 $A = 0$.

习题二

33.

在欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中求一个超平面 W ，使得向量 $e_1 + e_2$ 在 W 中的最佳近似向量为 e_2 .

37.

设 α_0 是欧式空间中 V 的单位向量, $\sigma(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, \alpha_0)\alpha_0, \alpha \in V$. 证明

(1) σ 是线性变换;

(2) σ 是正交变换.

38.

证明：欧式空间 V 的线性变换 σ 是反对称变换 $\iff \sigma$ 在 V 的标准正交基下的矩阵是反对称矩阵.

44.

证明 Givens 旋转矩阵 G 是正交矩阵, 对任意向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$, 计算 Gx 的各个分量. 设 x 是单位向量, 讨论如何重复使用若干 Givens 旋转矩阵将 x 变为标准向量 e_1 .

习题三

10.

设 A 的特征值为 $0, 1$ ，对应的特征向量为 $(1, 2)', (2, -1)'$. 判断 A 是否为对称矩阵并求 A .

Bonus Questions

求 $\alpha = (7, -4, -1, 2)'$ 在 ω 上的正交投影, 其中 ω 为 $Ax = 0$ 的解空间

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$