

关于希尔伯特空间的一些概念

(1) **线性空间**：主要研究集合的描述，即如何清楚地告诉别人这个集合是什么样的，为了描述清楚，就引入“基”的概念（相当于三维空间中的坐标系），所以对于一个线性空间来说，只要知道它的“基”，那么对于集合中的元素我们只要再知道在给定基下的坐标即可。

缺点：线性空间中的元素没有“长度”（相当于三维空间中的线段的长度），因此无法量化线性空间中的元素。

改进：我们在线性空间中引入了特殊的“长度”，即范数（空间度量的性质，简单来说就是长度，满足正定、正齐次和三角不等式三条性质）。赋予了范数的线性空间称为赋范线性空间（具有线性结构的度量空间）。

(2) **赋范线性空间的缺点**：空间中的两个元素之间没有角度的概念，为了解决这个问题，引入了内积的概念后变成内积空间。

希尔伯特空间：因为有度量，可以在度量空间、赋范线性空间以及内积空间中引入极限，但是抽象空间中的极限与实数上的极限有一个很大的不同点在于极限点可能不在原来给定的集合中，所以又引入了完备的概念，完备的内积空间就成为希尔伯特空间。

(3) **几个空间的关系**：线性空间（对数乘和向量加法封闭的向量空间）→赋范线性空间（向量长度）→内积空间（向量角度）→希尔伯特空间

